[A] W. Appel
[GK] Garet - Kurtzmann

Leçon 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications

Dans toute la leçon, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité et X désigne une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

I. Loi d'une variable aléatoire

1. Généralités [GK] pages 84 et 166

Définition 1.1 On appelle loi de X, notée $\mathbb{P}_X$, la mesure image de $\mathbb{P}$ par X. C'est-à-dire : pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Théorème 1.2 (de transfert) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application mesurable. Alors φ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}_X$ si et seulement si $\varphi \circ X$ est intégrable par rapport à $\mathbb{P}$. Le cas échéant, on a : $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_\Omega \varphi \circ X \, d\mathbb{P} = \int_E \varphi \, d\mathbb{P}_X$.

Remarque 1.3 Ce théorème permet donc de transférer un procédé d'intégration sur Ω en un procédé d'intégration sur E l'espace de valeurs de X.

Théorème 1.4 Si $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, X suit la loi μ si et seulement si pour tout $\phi \in C_c^0$, $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi \, d\mu$.

Remarque 1.5 On utilise souvent une version plus simple : si pour toute fonction f mesurable positive $\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu$ alors $\mathbb{P}_X = \mu$.

2. Variables aléatoires discrètes [GK] pages 137-140

Définition 1.6 On dit que X est discrète si la loi $\mathbb{P}_X$ est discrète, i.e. il existe $D \in \mathcal{E}$ dénombrable ou fini tel que $\mathbb{P}_X(D) = 1$.

Théorème 1.7 Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset D$ avec D dénombrable. Alors :

(i) pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(A) = \sum_{k \in D \cap A} \mathbb{P}(X = k)$

(ii) $\mathbb{P}_X = \sum_{k \in D} \mathbb{P}(X = k) \delta_k$

(iii) $\mathbb{P}_X$ admet comme densité par rapport à la mesure de comptage $f : x \longmapsto \mathbb{P}(X = x) \mathbb{1}_D(x)$

Proposition 1.8 Supposons X discrète à valeurs dans D dénombrable. On obtient alors si elle est intégrable $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in D} k \, \mathbb{P}(X = k)$.

Exemples 1.9

- loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$: $\mathbb{P}_X = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$
- loi uniforme sur $F \subset E$ fini $\mathcal{U}(F)$: $\mathbb{P}_X : A \longmapsto \frac{\# A \cap F}{\# F}$
- loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $\mathbb{P}_X = (\mathcal{B}(p))^{*n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$
- loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
- loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ où $\lambda > 0$

3. Variables aléatoires à densité [GK] pages 82 et [A] page 1

On suppose $(E, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

Définition 1.10 On dit que X est à densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de densité f si pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{P}_X(A) = \int_A f(x) \, dx$. C'est-à-dire : $d\mathbb{P}_X = f \, d\lambda$.

Proposition 1.11 On obtient, sous les hypothèses précédentes, f positive et $\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda = 1$.
Réciproquement, toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive d'intégrale unité peut être vue comme la fonction de densité d'une certaine variable aléatoire.

Exemples 1.12

- loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$: $f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ où $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$
- loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$: $f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$ où $\lambda > 0$
- loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$, où $m \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$
- loi de Cauchy $\mathcal{C}(a,b)$: $f_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{b}{\pi} \times \frac{1}{b^2 + (x-a)^2}$, où $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$
- loi uniforme sur K : $f_X : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \frac{1}{\mathrm{vol}(K)} \mathbb{1}_K(x)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ compact

II _ Caractérisation par des fonctions

1. Fonction de répartition [GK] page 118 et [A] pages 91 - 92

Définition 2.1 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : t \in \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{P}(X_1 \leqslant t_1, \dots, X_d \leqslant t_d)$.

Théorème 2.2 Si deux variables aléatoires ont même fonction de répartition elles ont même loi.

Proposition 2.3 Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :

1) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$
2) $F_X(t) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$ et $F_X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$
3) F_X est continue à droite et admet une limite à gauche
4) F_X est continue en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = x) = 0$

Proposition 2.4 Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite et vérifiant $\lim\limits_{-\infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} F(t) = 1$. Alors F est la fonction de répartition d'une unique probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Proposition 2.5 Si X est une v.a.r de fonction de densité f, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Exemples 2.6

Si $F_X : t \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$ alors $\min(X, Y) \sim \mathcal{E}(2)$.

2. Fonction génératrice [GK] pages 235 - 238

On considère ici X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition 2.7 On appelle fonction génératrice de X, la fonction $G_X : t \in [-1, 1] \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)\, t^k$

Proposition 2.8 Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Exemples 2.9

- si $X \sim \mathcal{B}(p)$, $G_X(t) = (1-p) + pt$
- si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $G_X(t) = ((1-p) + pt)^n$
- si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - (1-p)t}$
- si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $G_X(t) = e^{-\lambda(1-t)}$

Proposition 2.10 La fonction G_X est indéfiniment dérivable sur $]-1, 1[$ et vérifie : $G_X^{(n)} : s \longmapsto \mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-n+1)\, s^{X-n}]$.

Corollaire 2.11 En particulier, pour tout n, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. Ainsi, la fonction génératrice caractérise la loi.

3. Fonction caractéristique [GK] pages 239 - 245, 248 - 251

On considère X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.12 On appelle fonction caractéristique de X, la fonction $\phi_X : t \in \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}]$.

Remarque 2.13 Il s'agit, à $\sqrt{2\pi}$ près, de la transformée de Fourier de la loi $\mathbb{P}_X$.

Théorème 2.14 La fonction caractéristique caractérise la loi.

Corollaire 2.15 Deux vecteurs aléatoires X et Y de $\mathbb{R}^d$ tels que pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, $\langle X, a\rangle$ et $\langle Y, a\rangle$ ont même loi, ont même loi.

Théorème 2.16 Soit X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, Y à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Alors X et Y sont indépendants si et seulement si $\varphi_{(X,Y)}(s, t) = \varphi_X(s)\,\varphi_Y(t)$ pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Exemples 2.17

- $\mathcal{U}([a, b])$: $\phi_X(t) = e^{i\frac{a+b}{2}t} \dfrac{\sin \frac{b-a}{2}t}{\frac{b-a}{2}t}$
- $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$: $\phi_X(t) = e^{imt} e^{-\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$
- $\mathcal{C}(a, b)$: $\phi_X(t) = e^{iat} e^{-b|t|}$

développement 1

Théorème 2.18 Soit X v.a.r admettant un moment d'ordre n, alors ϕ_X est de classe C^n et vérifie : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\phi_X^{(k)}(0) = i^k\, \mathbb{E}[X^k]$.

Théorème 2.19 Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes alors
$$\phi_{X_1 + \dots + X_n} = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}.$$

Application 2.20
Soient $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ avec $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$
Alors : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

III - Convergence en loi [A] pages 395-402, 438, 462, 507

Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et X variables aléatoires de $\mathbb{R}^d$.

Définition 3.1 On dit que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$.

Théorème 3.2 Soit g une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$. Si $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X alors $(g(X_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers $g(X)$.

Corollaire 3.3 Soient $(X_n)_{n \geq 1}$, $(Y_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Si $(X_n, Y_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers (X, Y) alors :
- $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$
- $\langle X_n, Y_n \rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} \langle X, Y \rangle$

Proposition 3.4 Si X et $(X_n)_n$ sont discrètes à valeurs dans D dénombrable. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si : $\forall k \in D$, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$.

Exemple 3.5
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} n p_n = \lambda > 0$
Alors : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 3.6 On a : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $(F_{X_n})_{n \geq 1}$ converge vers F_X en tout point de continuité de F_X.

Théorème 3.7 (Lévy) - admis On a : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si et seulement si $(\phi_{X_n})_n$ converge simplement vers ϕ_X.

développement 2

Théorème 3.8 (Théorème central limite) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. admettant un moment d'ordre 2 fini. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_1$. Alors :
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Application 3.9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée. On a alors :
$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{2k-n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2} dx$$

Corollaire 3.10 (théorème de Moivre - Laplace) Soient $p \in]0,1[$ et $(S_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \longrightarrow F(x)$ où F est la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Application 3.11 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, on note $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_1$ connu. Alors : $\mathbb{P}\left(m \in \left[\overline{X_n} - \frac{q_{1-\alpha/2}\,\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \frac{q_{1-\alpha/2}\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 - \alpha$.